et aussi $\gamma \in [1,4]$ Par suite $\forall n \in IN; |f(2u_n) - f(\gamma)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|2u_n - \gamma|$

$$\Leftrightarrow \forall n \in IN; |u_{n+1} - \frac{1}{2}\gamma| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}|u_n - \frac{1}{2}\gamma|.$$

c) Montrons par récurrence que: $|u_n - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|; \forall n \in IN$

$\star \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^0 |u_0 - \frac{1}{2}\gamma| = 1.|u_0 - \frac{1}{2}\gamma| \geq |u_0 - \frac{1}{2}\gamma| \Rightarrow$ la proposition est vraie à l'ordre $n = 0$.

$\circledast$ Soit $p \in IN$; supposons que $|u_p - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^p |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$;

montrons que $|u_{p+1} - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{p+1} |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$. En effet

$|u_p - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^p |u_0 - \frac{1}{2}\gamma| \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}|u_p - \frac{1}{2}\gamma| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^p |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$

Or $|u_{p+1} - \frac{1}{2}\gamma| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}|u_p - \frac{1}{2}\gamma|$ alors $|u_{p+1} - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{p+1} |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$

Conclusion : $\forall n \in IN; |u_n - \frac{1}{2}\gamma| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - \frac{1}{2}\gamma|\right] = 0$ car $\frac{2}{\sqrt{5}} \in]-1,1[$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}\gamma$